コーシーの『解析教程』の翻訳を終えて (数学史の研究)

西村, 重人

数理解析研究所講究録
第1677巻 2010年 177-186

コーシーの『解析教程』の翻訳を終えて

明治大学付属中野八王子高等学校　西村重人 (Shigeto Nishimura)
Nakano-Hachioji Senior High School Attached to Meiji University

2009.8.26 京都大学数理解析研究所研究集会

はじめに

コーシーの『解析教程』は数学史上，数学の厳密化のはじまりと位置づけられる重要な著作である．この著作の中で特に目立つ箇所として，数と量，変化量と定量，極限などの基本概念，関数の連続性の定義，級数の収束条件などが挙げられるが，これらについてはこれまでも繰り返し取り上げられてきた．私は2年前からこの書物の翻訳に取り組んできたが，この度，翻訳原稿が完成し，近く出版の運びとなった．それを機に，本稿では『解析教程』の上記の点について原文に沿って確認し，再考してみようと思う．

1　『解析教程』の成立

『解析教程』の著者オーギュスタン・ルイ・コーシー (Augustin Louis Cauchy) は1789年8月21日にパリで生まれた．フランス革命勃発のため，学校は閉鎖されており，幼少期の教育は父親から受けた．1802年，パンテオン中央学校 (École centrale du Pantéon) に入学．1805年，エコール・ポリテクニク (École Polytechnique) に進み，1807年には土木学校 (Les École des Ponts et Chausées) に進学した．土木学校卒業後は技師としてナポレオン港の工事に当たるためにシェルブール (Cherbourg) に滞在し，多忙な間にも時間を見つけては数学の研究に没頭するようになった．コーシーが本格的に数学の論文を書くようになったのはこのころからである．約3年間技師として働いたが激務のために体調を崩し，1812年末にシェルブールからパリに戻った．パリに戻ったコーシーは科学者になることを決心し，科学者としての地位を求めたが，しばらくは土木局 (Ponts et Chaussées) の技師として働かなければならなかった．この間にも次々に論文を書き，1815年の論文「深さが不定の重流体の表面における波の伝播の理論」[*1]では学士院賞を受けるなど業績をあげた．

1816年，コーシーはエコール・ポリテクニクの教授に選出され，ここで解析学と力学の講義を行うようになった．その講義録をもとにエコール・ポリテクニクで使うテキストにすることを目的にして『解析教程』(Cours d'analyse de l'École royale polytechnique) の執筆を始めた．その第一部は微分積分を学ぶ準備的な内容に当たられ，「代数解析」という副題をつけて1821年に出版された．初版本は「序言」8ページ，目次6ページ，正誤表2ページ，本文576ページの長大な書物である．ページ数だけをみても講義用のテキストとして不向きであることは明白であり，結局エコール・ポリテクニクのテキストとして使われることはなかった．コーシーは解析学の基礎を確立し，解析学を自立した体系にして，学生たちに講義を行おうとした．しかし，この方針に基づく講義は評判が悪く，コーシーの講義はもっと早く微分積分に入れるよう改善を求められた．そのため，『解析教程』の続巻をあきらめ，その代わりに『微分積分学要論』(Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal) を1823年に出版したのである．

---

*1 "Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie"[コーシー全集，第一系列・第1巻，p.5-318].

コーシーは『解析教程』の第二部以降も構想していたに違いないが，後に『微分積分学要論』や 1829 年に『微分計算』という表題の書物を出版したところから想像すると,『解析教程』は第二部『微分計算』，第三部『積分計算』などと続く大部の書物にするつもりだったのだろう.

2 『解析教程』目次

『解析教程　第一部　代数解析 』の目次は次の通りである.

§1 級数についての一般的考察.

§2 すべての項が正である級数.

§3 正の項と負の項を含む級数.

§4 変化量の増加する整数冪に沿って整理された級数.

第 7 章 虚表示式とそのモジュール

§1 虚表示式に関する一般的考察.

§2 虚表示式のモジュールと簡約表示式.

§3 二つの量 $+1, -1$ の実冪根と虚冪根. それらの分数冪.

§4 虚表示式の冪根とその分数冪・無理数冪.

§5 これまでの節で確立された原理の応用.

第 8 章 虚変化量と虚関数

§1 虚変化量と虚関数に関する一般的考察.

§2 無限小の虚表示式と虚関数の連続性.

§3 対称虚関数・交代虚関数・斉次虚関数.

§4 一変量あるいは多変量の虚整関数.

§5 ある条件を満たす一変量の連続な虚関数の決定.

第 9 章 収束虚級数と発散虚級数. いくつかの収束虚級数の和.
これらの級数の和から導出されるいくつかの虚関数を表示するために用いられる記号.

§1 虚級数に関する一般的考察.

§2 変化量の増加整数冪に沿って整理された虚級数.

§3 収束級数の和を通じて導かれていくいくつかの虚関数を表示するために用いられる記号. これらの関数の諸性質.

第 10 章 左辺がただ一つの変化量の有理整関数である代数方程式の実や虚の根について. この種のいくつかの方程式の代数または三角法による解法.

§1 左辺が変化量 x の有理整関数であるあらゆる方程式は, この変化量の実の値や虚の値によって満たされること. 多項式を一次因子と二次因子に分解すること. 二次の実因子の幾何学的表現.

§2 二項方程式といくつかの三項方程式の代数的もしくは三角法による解法. モアブルの定理とコートの定理.

§3 三次と四次の方程式の代数的解法あるいは三角法による解法.

第 11 章 有理分数の分解

§1 ある有理分数を他の二つの同種の分数に分解すること.

§2 分母がいくつかの異なる一次因子の積であるような有理分数を, これらの一次因子をそれぞれの分母にもち, 定量を分子にもつ単純分数に分解すること.

§3 与えられた有理分数を, この分数の分母の一次因子もしくはその冪をそれぞれの分母にもち, 定量を分子にもつより単純な他のいくつかの分数に分解すること.

第 12 章 循環級数

§1 循環級数に関する一般的考察.

§2 有理分数の循環級数への展開.

§3 循環級数の和を求めること，および，その一般項を定めること.

ノート

I. 循環級数

II. 正の量と負の量の理論について.

III. 記号 $>$ または $<$ の使用から生じるいろいろな式について.
いくつかの量の間の中間について.

IV. 方程式の数値解法について.

V. 交代関数

$$(y-x)(z-y)(z-x)\cdots(v-x)(v-y)(v-z)\cdots(v-u)$$

の展開式について.

VI. 補間に関するラグランジュの公式.

VII. 図形数.

VIII. 二重級数.

IX. 弧の倍数の正弦または余弦を，種々の項がこの弧の正弦または余弦の増加する冪を因子にもつ多項式に変換するために用いられる公式.

X. 無限個の因子から作られる積.

3 基本的な概念

まず，基本的な概念についてのコーシー自身の言葉を引用する：

1. 数と量
「我々は常に大きさの絶対測定から数を取り出して，算術で用いられる意味において**数**(nombre) という呼び名を採用する．また，**正**あるいは**負**の**実量**，すなわち前述の数に符号 + または − をつけた数にのみ，**量**(quantité) という呼び名を当てることにする．さらに，量を，増加や減少を表すために設定されたものと見ることにする．したがって，ある与えられた大きさは，単位としてとられた他の同種の大きさと比較するだけであれば，ある数によって表されるにすぎないし，ある定められた同種の大きさとの増減を表すために使わねばならないと見なされるときには，前述の数に符号 + または符号 − をつけたものにより表される．このようにすれば，数の前に置かれた符号 + または − は，さながら形容詞が名詞の意味を変えるように，大きさの意味を変える．量の基部をなす数を量の**数値**(valeur numérique)，同じ数値と同じ符号をもつ量を**等しい量** (quantités égales)，数値については等しいが逆の符号がついた二つの量を**反対の量** (quantités opposées) と呼ぼう.」（序論）

2. 変化量と定量
「互いに異なるいくつもの値を次々に受け取ると考えられる量を**変化量** (quantité variable) と名づける．そのような量を通常アルファベットの末尾の方からとられた文字で表す．逆に，ある固定した定値を受け取るあらゆる量をアルファベットの最初の方の文字で表し，**定量** (quantité constante) と呼ぶ.」（序論）

3. 極限

「ある同一の変化量に次々に割り当てられる値がある一定の値に限りなく近づき，最後にはどれほどでも望むだけわずかな違いしか見られないようなとき，この値は他のすべての値の**極限**(limite) と呼ばれる.」(序論)

4. 無限小と無限大

「同一の変化量の連続する数値が，与えられたどのような量よりも小さくなるように，際限なく減少するとき，この変化量は**無限小**(infiniment petit) あるいは**無限小量**(quantité infiniment petite) と名づけられる．この種の変化量は 0 を極限にもつ.

同一の変化量の連続する数値が，与えられたどのような量よりも大きくなるように，ますます増加するとき，正の変化量を問題にしているのであれば，この変化量は記号 ∞ で表される**正の無限大**(infini positif) を極限にもつといい，負の変化量を問題にしているのであれば，この変化量は記号 $-\infty$ で表される**負の無限大**(infini négatif) を極限にもつという．正の無限大と負の無限大は**無限大量**(quantités infinies) という名でまとめて表される.」(序論)

コーシーは「数と量」,「変化量と定量」について明確に定義することから議論を始めた.「数」というのは純粋に数字のみによって表されるもので，数に $+$ や $-$ が付されたものを「量」と呼んでいる.「数」はまた「量」の数値 (valeur numérique) と呼ばれ，実数の「絶対値」に対応する言葉になっている.

極限の定義は直感に依存しているが「最後にはどれほどでも望むだけわずかな違いしか見られないようなとき」という言葉を補って厳密性を強めている．いわゆる ε 式の定義ではないが，コーシーがそうした論法をまったくとっていないかというとそういうわけでもなく，ε 式の論法は第 2 章 §3 の定理 I に出てくる：

定理 I ． — 増加する x の値に対して，差

$$f(x+1)-f(x)$$

がある極限 k に収束するならば，分数

$$\frac{f(x)}{x}$$

は同時に同じ極限に収束する.

証明. — まず，量 k は有限値をもつと仮定し，望むだけ小さな数を ε で表そう．x の値が増加していくと，差

$$f(x+1)-f(x)$$

は極限 k に収束していくのであるから，数 h に十分大きな値を与えて，x が h に等しいか，それより大きいとき，問題となっている差が限界

$$k-\varepsilon, \quad k+\varepsilon$$

の間に常に挟まれるようにすることができる．このように設定しておくとき，任意の整数を n で表せば，量

$$\begin{aligned}
&f(h+1)-f(h),\\
&f(h+2)-f(h+1),\\
&\cdots\cdots,\\
&f(h+n)-f(h+n-1)
\end{aligned}$$

の各々，それゆえ，これらの算術平均，すなわち

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$$

は，限界 $k-\varepsilon, k+\varepsilon$ の間に挟まれる．したがって，

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha$$

が得られる．ここで α は限界 $-\varepsilon, +\varepsilon$ の間に挟まれる量である．今度は

$$h+n=x$$

としよう．前の等式は

$$\frac{f(x)-f(h)}{x-h}=k+\alpha \tag{1}$$

となり，そこから

$$f(x)=f(h)+(x-h)(k+\alpha),$$
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+\left(1-\frac{h}{x}\right)(k+\alpha) \tag{2}$$

が帰結する．

さらに，x の値を際限なく増加させるためには，h の値を変えずに整数 n を際限なく増加させれば十分である．そこで，等式 (2) において，h を定量，x を極限 ∞ に収束する変化量と見なすことにしよう．右辺に含まれる量

$$\frac{f(h)}{x}, \quad \frac{h}{x}$$

は極限 0 に収束し，右辺自身は

$$k+\alpha$$

の形の極限に収束する．ここで α は常に $-\varepsilon$ と $+\varepsilon$ の間に挟まれる．それゆえ，比

$$\frac{f(x)}{x}$$

は $k-\varepsilon$ と $k+\varepsilon$ の間に挟まれる量を極限にもつ．この結果は数 ε の小ささにかかわらず成り立たなければならないので，そこから，問題の極限は正確に量 k であることが帰結する．言い換えれば，

$$\lim\frac{f(x)}{x}=k=\lim\left[f(x+1)-f(x)\right] \tag{3}$$

が得られる．

次に，$k=\infty$ と仮定しよう．この場合，望むだけ大きな数を H で表すと，十分に大きな値を数 h に与えて，x が h に等しいかそれより大きいとき，差

$$f(x+1)-f(x)$$

が，極限 ∞ に収束して，いつも H を超えるようにすることが常に可能である．さきほどのように議論すれば，式

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}>H$$

が確立される．いま，$h+n=x$ と置けば，等式 (2) の代わりに式

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(h)}{x} + H\left(1 - \frac{h}{x}\right)$$

が見いだされるが，この式で x を極限 ∞ に収束させれば，

$$\lim \frac{f(x)}{x} > H$$

が帰結する．それゆえ，比

$$\frac{f(x)}{x}$$

の極限は数 H がどれほど大きくてもそれを上回る．与えうるあらゆる数を超えるこの極限は正の無限大でしかありえない．

最後に $k=-\infty$ と仮定しよう．この場合を前述の場合に帰着させるためには，差

$$f(x+1)-f(x)$$

が $-\infty$ を極限にもつとき，差

$$[-f(x+1)]-[-f(x)]$$

は $+\infty$ を極限にもつことに着目すれば十分である．そのことから，$\dfrac{-f(x)}{x}$ の極限は $+\infty$ に等しいこと，したがって $\dfrac{f(x)}{x}$ の極限は $-\infty$ に等しいことが帰結する．

このようにコーシーは厳密な議論が必要な場合には ε 式の論法を採用しているのである．無限小と無限大についても，それぞれ「与えられたどのような量よりも小さくなるように」,「与えられたどのような量よりも大きくなるように」という言葉を添えて厳密性がでるように工夫している．無限小量に関しては「無限小量は 0 に他ならない」と語ったオイラーとは異なり，0 に近づく「変化量」として定義している．また無限大に関する論法も上記の定理の中に見ることができる．

4 関数の連続性

コーシーの「解析教程」の中で特に注目すべき点として，関数の連続性の定義がある．コーシーの時代には連続関数 (fonction continue) といえば，ただ一つの解析的表示式で表される関数を指すのが普通であった．コーシーはこうした連続関数の概念規定から脱却して「連続関数」という用語にまったく新しい定義を与えた：

「$f(x)$ は変化量 x の関数とし，与えられた二つの限界の間にある x の各々の値に対して，この関数は常にただ一つの有限値をとると仮定しよう．これらの限界の間に挟まれる x のある値から出発して，変化量 x に限りなく小さな増加量 α を与えれば，関数自身は増加量として差

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

をとるが，この差は新たな変化量 α と，x の値に同時に依存する．このような状勢のもとで，これらの限界の間にある x の各々の値に対して，差

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

の数値が α の値とともに際限なく減少するならば，関数 $f(x)$ は変化量 x に指定された二つの限界の間でこの変化量の**連続**関数となる．言い換えれば，**与えられた限界の間で変化量の限りなく小さな増加が関数自身の限りなく小さな増加を常に生み出すならば，関数 $f(x)$ はこれらの限界の間で x に関して連続となる．**」(第 2 章 §2)

関数の連続性の定義だけを現代の数学の立場から見ると，直感に依存していて厳密性に欠けているように思える．実際，いわゆる ε-δ 論法は『解析教程』にはまったく出てこない．しかし，コーシーの連続性の定義を上に引用した定理 I の証明の中でコーシーが述べたように言い直して見れば，

「望むだけ小さな数を ε で表そう．α の値が減少して差

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

は極限 0 に収束していくのであるから，数 δ に十分小さな値を与えて α の数値が δ に等しいか，それより小さいとき，問題となっている差は限界

$$-\varepsilon, \quad +\varepsilon$$

の間に常に挟まれるようにすることができる.」

となり，さほど無理なく ε-δ 論法が導き出される．こうして考えれば，ε-δ 論法が姿を現す準備はコーシーの段階ですでに整えられており，コーシーによって ε-δ 論法が確立された言っても過言ではないのである．

5　級数の収束条件

コーシーの『解析教程』でもう一つの重要な点は級数の収束について論じていることである．コーシーは級数について，

「いかなる級数の和を求めるときも，まず級数が和をもちうるのはどんな場合か，言い換えると，級数の収束条件は何かということを検討しなければならなかった.」(「序言」)

と述べて，級数の収束条件について特別に深い考察を行ったことを明言している．

1. 級数の収束・発散

「ある定められた法則によって次々に導かれる量の無限列

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots$$

を**級数**と呼ぶ．これらの量自身は考察される級数のいろいろな項となる．n は任意の整数を表すとして，最初の n 項の和を

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

としよう．常に増加する n の値に対して，和 s_n がある極限 s に際限なく近づくならば，級数はといい，その極限を級数の**和**と呼ぶ．逆に，n が際限なく増加するとき，和 s_n がいかなる定極限にも近づかないならば，この級数は**発散**し，もはや和をもたない．いずれの場合においても，添字 n に対応する項，すなわち u_n は**一般項**と名づけられる．級数が完全に定められるためには，添字 n の関数としてこの一般項を与えれば十分である.」(第 6 章 §1)

2. コーシーの判定法

「級数

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_n, \quad \cdots \tag{1}$$

がすべて正の項であるとき，次の定理を用いて，この級数が収束するか発散するかを一般的に定めることができる：

定理 I ．— n が際限なく増加するとき，表示式 $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ が収束していく先の極限もしくは諸極限を求め，それらの極限のうち最大のもの，換言すれば，ここで取り上げている表示式の諸最大値の極限を k で表そう．このとき級数 (1) は，$k<1$ ならば収束し，$k>1$ ならば発散する．

証明．— まず，$k<1$ としよう．そして，二つの数 1 と k の間に

$$k<U<1$$

となるように三番目の数 U を好きなように選ぼう．n が与えうるあらゆる限界を超えて増加するとき，$(u_n)^{\frac{1}{n}}$ の諸最大値は，最終的に U より常に小さくなることなく，極限 k に際限なく近づくということはありえない．したがって，整数 n に十分大きな値を与えて，n がこの値をとるかまたはそれよりも大きい値をとるときも常に

$$(u_n)^{\frac{1}{n}}<U, \quad u_n<U^n$$

となるようにすることが可能である．そのことから，級数

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \cdots$$

の諸項は最後には幾何級数

$$1, \quad U, \quad U^2, \quad \cdots, \quad U^n, \quad U^{n+1}, \quad U^{n+2}, \quad \cdots$$

の対応する項より常に小さくなることが帰結する．この級数は ($U<1$ ゆえ) 収束するので，いまの注意から言うに及ばず，級数 (1) の収束を結論することができる．

次に，$k>1$ としよう．そして，二つの数 1 と k の間にやはり

$$k>U>1$$

となるように三番目の数 U を配置しよう．n があらゆる限界を超えて増加すれば，$(u_n)^{\frac{1}{n}}$ の諸最大値は，k に際限なく近づき，最後には U より大きくなる．それゆえ，望むだけ大きな n の値から先は，条件

$$(u_n)^{\frac{1}{n}}>U$$

あるいは同じことだが，

$$u_n>U^n$$

が満たされる．したがって，級数

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \cdots$$

において，幾何級数

$$1, \quad U, \quad U^2, \quad \cdots, \quad U^n, \quad U^{n+1}, \quad U^{n+2}, \quad \cdots$$

の対応する項より大きい無限個の項が見いだされる．この級数は ($U>1$ ゆえ) 発散し，したがって，その種々の項はどこまでも限りなく増加するので，いまの注意は級数 (1) の発散を証明するのに十分である.」(第 6 章 §2)

3. コーシー・アダマールの定理
級数

$$a_0, \quad a_1x, \quad a_2x^2, \quad \cdots, \quad a_nx^n, \quad \cdots$$

を (1) として

「定理 I ． — 増加する n の値に対して，a_n の諸最大数値の n 次の冪根が収束していく先の極限を A としよう．このとき，級数 (1) は，限界

$$x = -\frac{1}{A}, \quad x = +\frac{1}{A}$$

の間に挟まれるすべての x の値に対して収束し，これらの限界の外側に位置するすべての x の値に対して発散する．」(第 6 章 §4)

コーシーは級数を一般的に表すのに今日のような記法ではなく，単に項をカンマで区切って並べることによって表した．これは収束の問題を考慮しての記法で，収束する級数に限って「+」記号で結ぶ方式をとった：

「一般に，収束級数の和を，最初のいくつかの項の和の後に「…」をつけて表す．したがって，級数

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots$$

が収束するとき，この級数の和は

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

で表される.」(第 6 章 §1)

上極限や集積値の概念が不完全であったために，今日「コーシーの判定法」と呼ばれている定理の記述はわかりにくいものになっている．この定理の表現について少し補足を加えよう．まず，数列 $\{(u_n)^{\frac{1}{n}}\}$ は有界とする．

「n が際限なく増加するとき，表示式 $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ が収束していく先の極限もしくは諸極限を求め，それらの極限のうち最大のもの（を k で表そう)」

というのは，数列 $\{(u_n)^{\frac{1}{n}}\}$ が収束すれば，それを k とし，この数列が一つの極限に収束するとは限らない場合は，その集積値を指してこの数列の「諸極限」と呼び，これらの集積値の上限を k とするということである．

「ここで取り上げている表示式（$(u_n)^{\frac{1}{n}}$）の最大の諸値の極限を k で表そう」

というのは今日の上極限の定義と同じである．すなわち，n を固定して上限

$$s_n = \sup_{t \geqq n}\{(u_t)^{\frac{1}{t}}\}$$

をとると数列 $\{s_n\}$ は単調減少数列となるが，$\{(u_n)^{\frac{1}{n}}\}$ の有界性から極限をもつ．それを k で表すというのである．以上のように解釈できれば定理の意味はよくわかるが，コーシーの記述で真意が伝わったかどうかは疑わしい．第 6 章のここまでのところで，集積値や上極限に関する記述は何ら見られず，コーシーの判定法の記述の中に分かりづらい表現で現れてくる．このあとに提示された「コーシー・アダマールの定理」が当時は理解されずに見過ごされ，アダマールが再発見するまで忘れ去られてしまった史実はよく知られているが，見過ごされることはなかったものの「コーシーの判定法」の方も理解し難かったに違いはないと思う．